Henryk Dąbrowski
Waldemar Rożek

Arkusz przykładowy, poziom rozszerzony (A1)

Zadanie 2.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

A. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ C. $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ D. $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

==========================

Najprostszym sposobem rozwiązania tego zadania jest po prostu zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego, w którym $a_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $a_2 = \frac{3}{2}$ i $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Jeżeli na tym etapie rozwiązania popełnimy błąd i źle wyznaczymy pierwszy wyraz ciągu bądź iloraz, to o ile tylko nie popełnimy kolejnych błędów, nie mamy właściwie szans na otrzymanie którejkolwiek z podanych odpowiedzi. Powinno nas to skłonić do poszukania błędu, który musieliśmy popełnić. O takiej „weryfikacji" otrzymanego wyniku należy pamiętać przy rozwiązywaniu wszystkich zadań, w których wiemy, że wśród podanych odpowiedzi jest jedna poprawna.

Po zastosowaniu wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego pozostają już tylko proste obliczenia

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

i wybranie poprawnej odpowiedzi D.

Czy strategia podstawiania podanych odpowiedzi i eliminowania błędnych jest w tym zadaniu skuteczna? Być może liczba 3 występująca we wzorze określającym ciąg sugeruje, że poprawną odpowiedzią jest D, bo tam też jest 3 w liczniku. Nie ma jednak wystarczających przesłanek, aby twierdzić, że trójka nie skróci się w trakcie obliczeń. W tym zadaniu pytamy o sumę wszystkich wyrazów, jeśli zapytamy o sumę wyrazów o indeksach podzielnych przez cztery, to jak łatwo sprawdzić, trójka skróci się. Otrzymamy wówczas $S = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1$.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że nie zawsze suma szeregu geometrycznego istnieje. W omawianym zadaniu mieliśmy wskazać wartość sumy szeregu geometrycznego, a więc w ogóle nie musieliśmy zastanawiać się, czy ta suma ma wartość skończoną, ani czy w ogóle istnieje. Natomiast w zadaniu, w którym jest dany jest szereg geometryczny, a zadanie polega na obliczeniu sumy tego szeregu należy sprawdzić warunek konieczny i wystarczający zbieżności szeregu, a więc czy iloraz $|q| < 1$ (zakładamy przy tym, że ciąg $(0, 0, 0, ...)$ jest geometryczny i jego ilorazem jest $q = 0$). Aby zilustrować, jak ważne jest sprawdzenie warunku $|q| < 1$, przedstawimy rozwiązania następujących dwóch zadań.

Zadanie 2a.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{\left(\sqrt{2}-1\right)^n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

========================

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1 = \frac{3}{\sqrt{2}-1}$, iloraz tego ciągu jest równy $q = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Gdybyśmy teraz zastosowali wzór $S = \frac{a_1}{1-q}$ na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, to otrzymalibyśmy

$$S = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-2} .$$

Mogłoby się więc wydawać, że rozwiązaliśmy zadanie. Jednak, wystarczy spojrzeć na otrzymaną liczbę, żeby zauważyć, że jest ona ujemna (mianownik otrzymanego ułamka jest ujemny, a licznik dodatni). W takim razie nie może to być suma wszystkich wyrazów ciągu, gdyż wszystkie te wyrazy są liczbami dodatnimi. Co więc zrobiliśmy źle? Otóż nie sprawdziliśmy, czy suma wszystkich wyrazów naszego ciągu jest skończona. Liczba $q = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ jest większa od 1, gdyż ułamek $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ jest dodatni, a jego mianownik jest mniejszy od licznika. Oznacza to, że ciąg (a_n), którego wyrazy są dodatnie, co zauważyliśmy już wcześniej, jest rosnący. Sumując więc kolejne wyrazy ciągu dodawalibyśmy coraz większe liczby dodatnie. Zatem suma nieskończenie wielu takich liczb nie może być liczbą skończoną. Jest ona nieskończenie wielka, co możemy zapisać $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = +\infty$. Możemy zatem zapisać, że suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego nie jest liczbą rzeczywistą. Dlatego po obliczeniu $q = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ wystarczyło stwierdzić, że $\frac{1}{\sqrt{2}-1} > 1$, a więc nie istnieje skończona suma wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 2b.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{\left(\sqrt{2}-3\right)^n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

=========================

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1 = \frac{3}{\sqrt{2}-3}$. Iloraz tego ciągu jest równy $q = \frac{1}{\sqrt{2}-3}$. Łatwo zauważyć, że jest to liczba ujemna, ale większa od -1. Zatem spełnia warunek $|q| < 1$. Wobec tego istnieje skończona suma wszystkich wyrazów nieskończonego (a_n) i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}-3}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}-3}} = \frac{3}{\sqrt{2}-3} \cdot \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3-1} = \frac{3}{\sqrt{2}-4} .$$

Jak widać, wzór na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego należy stosować rozważnie, upewniając się wcześniej, że taka suma jest skończona.